**20) Матричное представление трехмерных преобразований с помощью однородных координат**

Трехмерная точка (x,y,z) записывается в однородных координатах как, для получения трехмерных декартовых координат точки (x,y,z) первые три однородные координаты делятся на W.

Трехмерный перенос является простым расширением двумерного:

T(dx,dy,dz) = ,

т.е. [xyz1]T(dx,dy,dz) = [x+dxy+dyz+dz 1].

Масштабирование расширяется аналогичным образом:

S(Sx,Sy,Sz) = ,

[xyz1]S(Sx,Sy,Sz) = [Sxx Syy Szz 1].

В трехмерном пространстве поворот вокруг оси z описывается выражением (напомним, это выражение для правосторонней системы, для левостронней знаки синусов поменялись бы местами)

Rz(A) = .

Матрица поворота вокруг оси x имеет вид

Rx(A) = .

Матрица поворота вокруг оси у записывается в виде

Ry(A) = .

Столбцы (и строки) верхней левой подматрицы размером 3х3 матриц Rz(A), Rx(A), Ry(A) представляют собой взаимно ортогональные единичные векторы.

Все эти матрицы преобразований имеют обратные матрицы. Матрица, обратная Т, получается подстановкой знака минус перед dx, dy и dz; обратная S – заменой Sx,Sy и Sz на обратные им значения, а для каждой из трех матриц поворота – выбором отрицательного угла поворота.

**21) Пример композиции трехмерных преобразований**

Путем объединения элементарных трехмерных преобразований можно получить другие преобразования.



Начальная позиция Конечная позиция

Рис. 11. Преобразование точек Р1, Р2 и Р3 из начальной позиции   
в конечную

**Шаг 1. Перенос Р1 в начало координат**:

Т(-x1, -y1, -z1) = 

Применение Т к Р1, Р2 и Р3 дает

Р1' = P1T(-x1, -y1, -z1) = [0 0 0 1],

Р2' = P2T(-x1, -y1, -z1) = [x2-x1y2-y1z2-z1 1],

Р3' = P3T(-x1, -y1, -z1) = [x3-x1 y3-y1 z3-z1 1].

**Шаг 2. Поворот вокруг оси у.**

На рис. 12 показаны отрезки  и  после шага 1 и проекция  на плоскость xz.



Рис. 12. Поворот вокруг оси у; проекция  поворачивается до совмещения с отрицательной полуосью z

Поворот производится на положительный угол А, для которого

,

,

где

.

В результате подстановки этих значений в матрицу Ry(A) получаем:

.

**Шаг 3. Поворот вокруг оси х.**

На рис. 13 показан отрезок  после шага 2.



Рис. 13.

Поворот производится на отрицательный угол В, для которого

cos(-B) = cosB = ,

sin(-B) = -sinB = ,

где

. (длина отрезка ).

Результатом поворота на шаге 3 является:

P2''' = P2''Rx(B) = P2'Ry(A)Rx(B) = P2TRy(A)Rx(B) =

= ,

т.е.  теперь совпадает с отрицательной полуосью z.

**Шаг 4. Поворот вокруг оси z.**

На рис. 14 показаны  и  после шага 3, когда Р2'' лежит на отрицательной полуоси z, а Р3''' - в точке

P3''' = [x3''' y3''' z3''' 1] = P3T(-x1, -y1, -z1)Ry(A)Rx(B).



Рис. 14. Поворот вокруг оси z; проекция  поворачивается до совмещения с осью у

Поворот производится на положительный угол С, для которого cosC = y3'''/D2, sinC = x3'''/D2, D2 = .

После шага 4 получается конечный результат.

Результирующая матрица

T(-x1,-y1,-z1)Ry(A)Rx(B)Rz(C) = TR

описывает искомое преобразование.